حركة الأجسام الصلبة

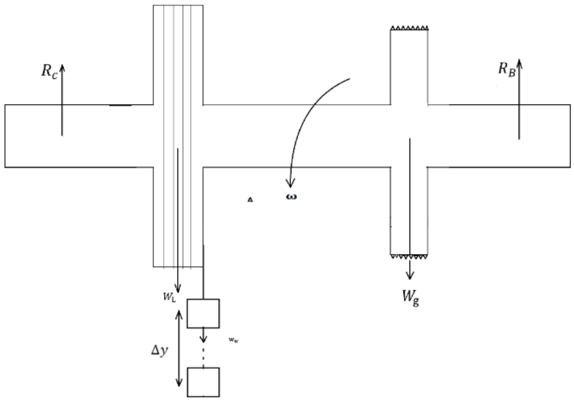
د.اسكندر عمجة

التحريك

مسألة:

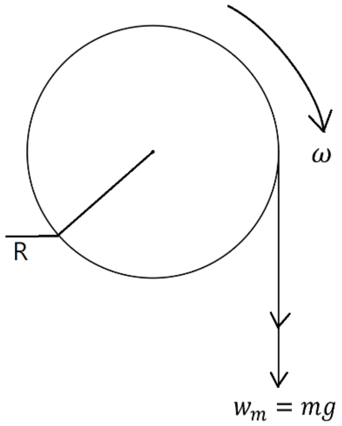
تجربة حساب عزم عطالة القرص

المعطيات : الكتلة **m** , ملفاف نصف قطره **R** , عزم عطالة (المحور+الملفاف)I_R , انتقال الكتلة **m** أي Δy زمن الانتقال **t**



المطلوب: حساب I_G

الحل:



نلاحظ أن القوى المؤثرة على الجملة المؤلفة من المحور مع الملفاف والمسنن والكتلة هي W_G, W_0, W_m, R_B, R_C

لذا يمكن إيجاد I_G من تطبيق علاقة مشتق العزم الحركي بالنسبة للزمن حول محور دوران **z**

$$\frac{d}{dt}k_2 = \sum m_z(F_k) \quad (^*)$$

الطرف الأيمن ل $(^*)$ يكون مساويا ل

$$\sum M_z(F_k) = m_2(W_L) + m_2(W_m) + m_2(W_G) + m_2(R_C) + m_2(R_B)$$

$$= m_2(W_m) = mgR$$

اما الطرف الايسر من العلاقة فيمثل

$$k = k_z^L + k_z^m + k_z^G \iff k_2 = \omega I_l + mv_m R + \omega I_G$$

$$= \frac{v_m}{R}(I_l + mR^2 + I_G) = \frac{V_m}{R}U$$

$$\frac{d}{dt}k = \frac{A_m}{R}U$$

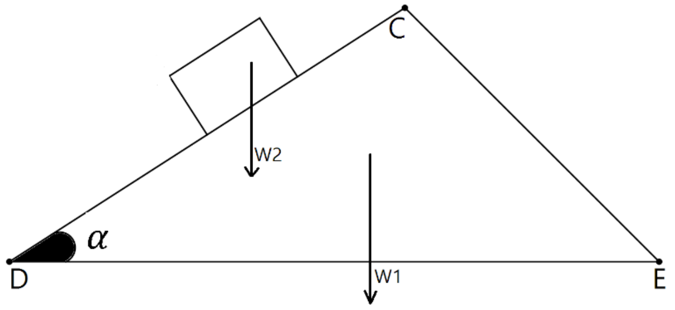
بالتعويض في (*) $\frac{A_m}{R}U = mgR \iff U = \frac{1}{A_m}mgR^2$

تحسب A_m من معادلة الحركة المعطاة $f(t) = \Delta y \iff \ddot{F}(A) = A_m$ ((اشتقاقها مرتين))

$$U = \cdots \quad I_l + MR^2 + I_G = \cdots \iff I_G = \cdots$$

مسألة:

ثقل وزنه w_2 قادر على الانزلاق على المستوي **CD** المائل بزاوية α بإسفين ((جسم)) **ECD** وزنه w_1 يرتكز قاعدته على سطح افقي املس فإذا كانت المجموعة ساكنة في البدء وكانت حركة الثقل على المستوي **CD** هي حركة متسارعة وفق العلاقة $x = a\frac{t^2}{2}$ بتسارع قدره **a** عينها بإهمال مقاومة حركة الاسفين على السطح الافقي مقدار واتجاه كلا من سرعة وانتقال الاسفين عند انزلاق الثقل مسافة قدرها **Δx**



الحل:

لايجاد سرعة وانتقال الاسفين نطبق مبدأ الدفع وكمية الحركة ((مشتق كمية الحركة)) على الجملة ((اسفين w_1 , ثقل w_2))بين لحظتين ((عندما كانت الجملة ساكنة وبين اللحظة النهائية))والسبب في اختيارنا لهذا المبدأ هو أن القوى المؤثرة على الجملة هي ثقل الاسفين w_1, ثقل الكتلة w_2 , قوى القيد $R = \sum R$ جميعها عمودية على محور الحركة والذي سنفرض أنه موجه لليمين

$$Q - Q_0 = \sum \vec{I} = \vec{I}W_1 + \vec{I}W_2 + \vec{I}R$$

وبإسقاط هذه العلاقة على محور الانتقال الافقي الموجه الى اليمين مع مراعاة ان $Q_0 = 0$ اذ ان الجملة كانت ساكنة في البدء

$$Q - Q_{0x} = 0 \Longrightarrow \quad Q_{0x} = 0$$

$$q_{1x} + q_{2x} = 0$$

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = 0$$

v_{1x} تمثل مسقط السرعة المطلقة للاسفين ((لمركز ثقله))على المحور x

v_{2x} تمثل مسقط السرعة المطلقة للثقل ((لمركز ثقله)) على المحور x

لكن $v_{2x} = v_{2xe} + v_{2xr}$

v_{2xe} مسقط السرعة المكتسبة للثقل $W_2 \Leftarrow V_{2xe} = -V_{2r}\,cos\alpha = -at\,cos\alpha$

v_{2xr} مسقط السرعة النسبية للثقل $W_2 \Leftarrow V_{2rx} = V_{1x} = V_1$

نعوض في (*) $\frac{w_1}{g}V_1 + \frac{w_2}{g}(-at\,cos\alpha + V_1) = 0$

$$W_1V_1 + W_2V_2 = W_2 at\,cos\alpha \Leftrightarrow (W_1 + W_2)V_1 = W_2 at\,cos\alpha$$

الإشارة الموجبة تدل على ان الاسفين يتحرك وفق الاتجاه المفروض $V_1 = \frac{W_2}{W_1+W_2} at\,cos\alpha$

$$m_1V_{1x} + m_2V_{2x} = 0 \Leftrightarrow \frac{W_1}{g}\frac{dx_1}{dt} + \frac{W_2}{g}\frac{dx_2}{dt} = 0$$

علاقة انحفاظ مركز الكتل $W_1\Delta x_1 + W_2\Delta x_2 = 0$ (**)

المجموع الجبري لجداءات كتل ((او اوزان)) أجزاء الجملة بمساقط الانتقالات المطلقة لمراكز ثقل أجزاء الجملة وفق محور الانتقال الافقي يكون مساويا للصفر .

Δx_1 تمثل مسقط الانتقال المطلق لمركز ثقل الاسفين للمحور x .

$\Delta x_2 = \Delta x_{2ex} + \Delta x_{2rx}$ تمثل مسقط الانتقال المطلق لمركز ثقل الاسفين على المحور x .

Δx_{2ex} تمثل مسقط الانتقال المكتسب= Δx_1 .

Δx_{2rx} تمثل مسقط الانتقال النسبي $\Delta x_{2rx} = -\Delta x_{2r} cos\alpha = -\frac{at^2}{2} cos\alpha$

نعوض في العلاقة (**)

$$W_1\Delta x_1 + W_2\left(\Delta x_1 - \frac{at^2}{2} cos\alpha\right) = 0$$

الإشارة الموجبة تدل على ان الاسفين يتحرك الى اليمين

$$(W_1+W_2)\Delta x_1 = W_2\frac{at^2}{2}cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \Delta x_1 = \frac{W_1}{(W_1+W_2)}\frac{at^2}{2}cos\alpha$$

طريقة ثانية :

$$V_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{W_1}{W_1+W_2}at\,cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow dx_1 = \frac{W_1}{W_1+W_2}at\,cos\alpha\,dt$$

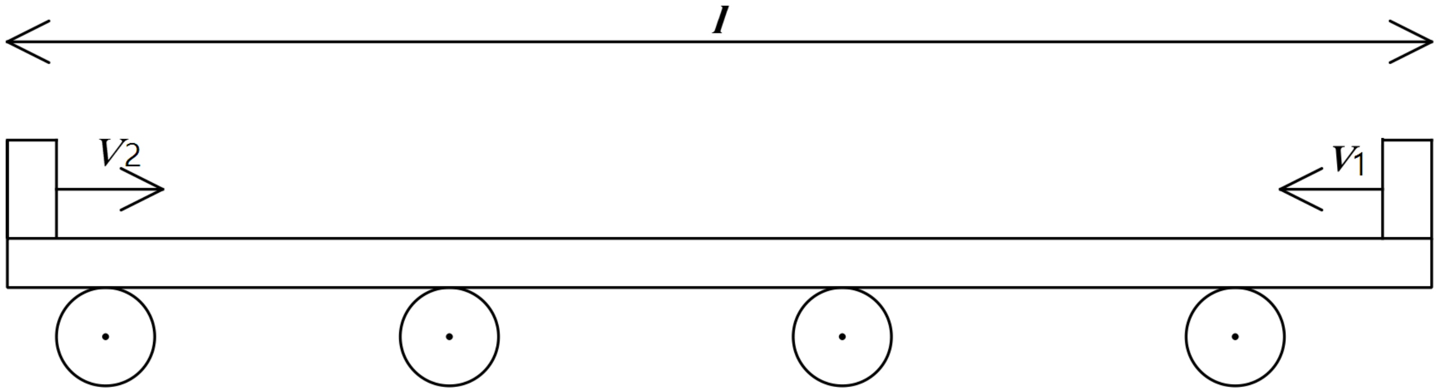
$$\int_0^{\Delta x_1} dx_1 = \int_0^t \frac{W_1}{W_1+W_2}atcos\alpha dt \Leftrightarrow \Delta x_1 = \frac{W_1}{(W_1+W_2)}\frac{at^2}{2}cos\alpha$$

مسألة:

جسم كتلته m_1 وجسم آخر كتلته m_2 يقعان على طرفي عربة طولها **L** وكتلتها **m** وقابلة للحركة على سطح افقي وابتدأت الكتلة m_1 الحركة بالسرعة V_1 بالنسبة للعربة والكتلة الثانية m_2 تتحرك بسرعة V_2 بالنسبة للعربة وباعتبار مبدأ الاحداثيات محور بالشكل

المطلوب :

اوجد سرعة العربة بدلالة كل منهما وعلاقة انتقال العربة بدلالة كل منهما .



الحل:

نطبق مبدأ الدفع وكمية الحركة على الجملة المؤلفة من m, m_2, m_1 مع ملاحظة ان القوى المؤثرة على الجملة بعد تحريرها من قيودها هي جميعها عمودية على محور الانتقال المفروض نحو اليمين كما في الشكل :

$$Q_1 - Q_0 = \sum \overrightarrow{I^e} = \overrightarrow{I_{W1}} + \overrightarrow{I_{W2}} + \overrightarrow{I_{\sum R}} + \overrightarrow{I_W} = 0$$

$\longrightarrow Q_{1x} = Q_x = 0$ $\quad Q_0 = 0$ كانت ساكنة في البدء

$$q_1 + q_2 + q = 0$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + mv = 0$$

حيث v هي السرعة المطلقة للعربة المطلوبة .

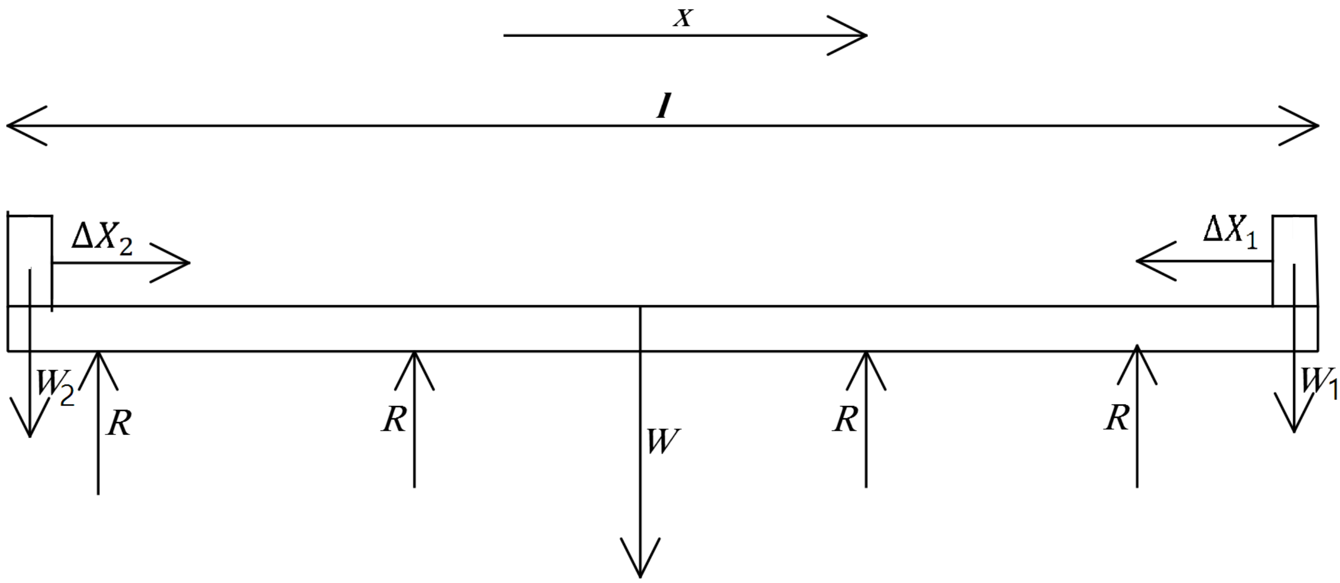
$$\overline{v_1} = v_{1r} + v_{1e} \qquad v_{1r} = v_1 \qquad v_{1e} = v$$

$$\overline{v_2} = v_{2r} + v_{2e} \qquad v_{2r} = -v_2 \qquad v_{2e} = v$$

نعوض :

$$m_1(v + v_1) + m_2(v - v_2) + mv = 0$$

$$\longrightarrow (m_1 + m_2 + m)v = m_2 v_2 - m_1 v_1 \Leftrightarrow v = \frac{m_2 v_2 - m_1 v_1}{\sum m}$$



إذا كانت $m_2 v_2 > m_1 v_1 \Leftarrow m_2 v_2 - m_1 v_1 > 0 \quad \Leftarrow$

اذا السرعة موجبة والعربة تتحرك نحو اليمين

واذا كانت $m_2 v_2 = m_1 v_1 \Leftarrow m_2 v_2 - m_1 v_1 = 0 \quad \Leftarrow$ العربة ساكنة

واذا كانت $m_2v_2 < m_1v_1 \Leftarrow m_2v_2 - m_1v_1 < 0 \Leftarrow$ العربة تتحرك نحو اليسار

الانتقال :

$$m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + m\Delta x = 0$$

$\Delta x = ?$ $\quad \Delta x_1 = \Delta x_1 + \Delta x - \Delta x_2 = \Delta x_2 - \Delta x$

نعود للنقاش السابق

$$\Delta x = \frac{m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2}{\sum m}$$

طلب إضافي :

حدد انتقال العربة عند الالتقاء بين الكتلتين .

$\Delta x = \frac{m_1(L-\Delta x_2)-m_2\Delta x_2}{\sum m}$ نعوض $\Delta x_1 = L - \Delta x_2$